Función valor absoluto
Sea la función $|\ \ |: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ definida así:

$$|x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

Función signo
Sea la función $sign: \mathbb{R} \to \{-1,0,1\}$ definida así:

$$sign(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Función delta
Sea la función $\delta: \mathbb{R} \to \{0,1\}$ definida así:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

$$\delta(x) = 1 - sign^2(x)$$

Funciones mínimo y máximo
Sea la función $f: \mathbb{R} \to \{0, 1/2, 1\}$ definida así:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x| + x}{2|x|}, & x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{1 + sign(x)}{2}$$

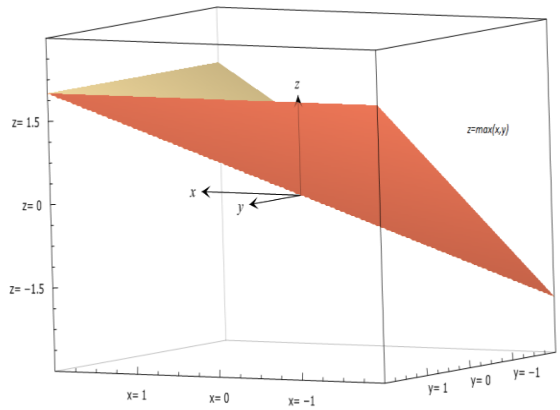
Sea la función $min: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida así:

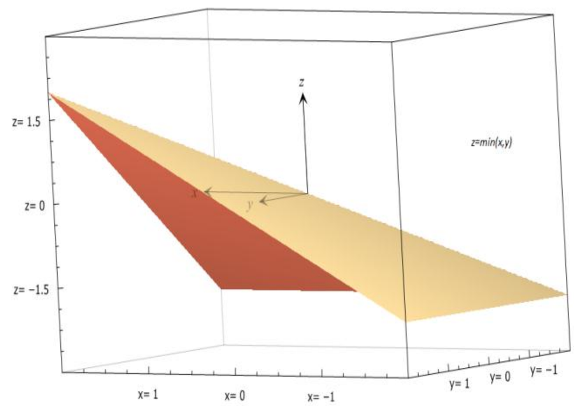
$$min(x,y) = \begin{cases} x, & x < y \\ y, & x \geq y \end{cases}$$

$$min(x,y) = [1 - f(x-y)]x + f(x-y)y = \frac{(x+y) - |x-y|}{2}$$

Luego, la función $max: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ se define así:

$$max(x,y) = (x+y) - min(x,y) = \frac{(x+y) + |x-y|}{2}$$





Propiedades

Para $x \in \mathbb{R}$:

- $\frac{d}{dx}|x| = sign(x),\ si\ x \neq 0$
- $sign(-x) = -sign(x)$
- $sign^2(x) = sign(x),\ si\ x \geq 0$
- $\delta(-x) = \delta(x)$
- $x\delta(x) = 0$
- $x^{\delta(x)} = 1 - \delta(x)$
- $\frac{d}{dx} sign(x) = 0,\ si\ x \neq 0$

Relación de Pertenencia a un intervalo

Sea la función $g: \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 | u \neq v\} \times \mathbb{R} \rightarrow \{0,1\}$ definida así:

$$g\big((a, b), x\big) = \begin{cases} 0, & x \notin [min(a, b), max(a, b)] \\ 1, & x \in [min(a, b), max(a, b)] \end{cases}$$

$$g\big((a, b), x\big) = sign^2\big(sign(x - a) - sign(x - b)\big)$$

Sea la función $g_{-\infty}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \{0,1\}$ definida así:

$$g_{-\infty}(c, x) = \begin{cases} 0, & x > c \\ 1, & x \leq c \end{cases}$$

$$g_{-\infty}(c, x) = \lim_{min(a,b) \to -\infty} g\big((a, b), x\big) = sign\big(1 - sign(x - c)\big)$$

Sea la función $g_{+\infty}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \{0,1\}$ definida así:

$$g_{+\infty}(c, x) = \begin{cases} 0, & x < c \\ 1, & x \geq c \end{cases}$$

$$g_{+\infty}(c, x) = \lim_{max(a,b) \to +\infty} g\big((a, b), x\big) = sign\big(1 + sign(x - c)\big)$$

Sea la función $r: \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 | u \neq v\} \times \mathbb{R} \rightarrow \{0,1\}$ definida así:

$$r\big((a,b),x\big)=\begin{cases}0, & x\notin\,]min(a,b),max(a,b)[\\ 1, & x\in\,]min(a,b),max(a,b)[\end{cases}$$

$$r\big((a,b),x\big)=\big(1-g_{-\infty}(min(a,b),x)\big)\big(1-g_{+\infty}(max(a,b),x)\big)$$

Sea la función $s:\{(u,v)\in\mathbb{R}^2|u\neq v\}\times\mathbb{R}\to\{0,1\}$ definida así:

$$s\big((a,b),x\big)=\begin{cases}0, & x\notin\,]min(a,b),max(a,b)]\\ 1, & x\in\,]min(a,b),max(a,b)]\end{cases}$$

$$s\big((a,b),x\big)=\big(1-g_{-\infty}(min(a,b),x)\big)\big(g_{-\infty}(max(a,b),x)\big)$$

Sea la función $t:\{(u,v)\in\mathbb{R}^2|u\neq v\}\times\mathbb{R}\to\{0,1\}$ definida así:

$$t\big((a,b),x\big)=\begin{cases}0, & x\notin [min(a,b),max(a,b)[\\ 1, & x\in [min(a,b),max(a,b)[\end{cases}$$

$$t\big((a,b),x\big)=\big(g_{+\infty}(min(a,b),x)\big)\big(1-g_{+\infty}(max(a,b),x)\big)$$

Sea la función $sign_\infty:\mathbb{R}\to\{-\infty,0,+\infty\}$ definida así:

$$sign_\infty(x)=\begin{cases}-\infty, & x<0\\ \quad 0, & x=0\\ +\infty, & x>0\end{cases}$$

$$sign_\infty(x)=\frac{x}{g_{-\infty}(0,x)g_{+\infty}(0,x)}=\frac{x}{sign\big(1-sign(x)\big)sign\big(1+sign(x)\big)}$$

Luego, la función *delta de Dirac* $\delta_\infty:\mathbb{R}\to\{0,\infty\}$ se define así:

$$\delta_\infty(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0\\ \infty, & x=0\end{cases}$$

$$\delta_\infty(x)=\frac{1}{sign_\infty^2(x)}$$

Función parte entera

Sea la función $\lfloor\ \ \rfloor:\mathbb{R}\to\mathbb{Z}$ definida así:

$$\lfloor x\rfloor=n, \textit{siempre que } n\leq x<n+1$$

Observación: Si hay algún decimal entre los términos del argumento, el resultado es la parte entera de la forma decimal del argumento; en caso contrario, es el cociente entero de la forma racional del argumento.

Ejemplo

Sea la función $f:\mathbb{R}\to[0,1]$ definida así:

$$f(x)=\begin{cases}x-\lfloor x\rfloor, & x\in\left[2\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor,2\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor+1\right[\\ -\big(x-(\lfloor x\rfloor+1)\big), & x\in\left[2\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor+1,2\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor+2\right[\end{cases}$$

$$f(x)=t\left(\left(2\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor,2\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor+1\right),x\right)(x-\lfloor x\rfloor)+t\left(\left(2\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor+1,2\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor+2\right),x\right)\left(-\left(x-(\lfloor x\rfloor+1)\right)\right)$$

$$=sign\left(1+sign\left(x-2\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor\right)\right)\left(1-sign\left(1+sign\left(x-\left(2\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor+1\right)\right)\right)\right)(x-\lfloor x\rfloor)$$

$$-sign\left(1+sign\left(x-\left(2\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor+1\right)\right)\right)\left(1-sign\left(1+sign\left(x-\left(2\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor+2\right)\right)\right)\right)\big(x$$

$$-(\lfloor x\rfloor+1)\big)$$

f es continua, periódica de período 2 e inyectiva en $[k,k+1[$ (con $k\in\mathbb{Z}$).

Función kappa

Sea la función $\varkappa:\mathbb{R}\to\{0,1\}$ definida así:

$$\varkappa(x)=\begin{cases}0, & x\notin\mathbb{Z}\\ 1, & x\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\varkappa(x)=\delta(x-\lfloor x\rfloor)$$

Ejemplo

La función del ejemplo anterior, se puede definir así:

$$f(x)=\begin{cases}x-\lfloor x\rfloor, & \lfloor x\rfloor\equiv 0\ (mod\ 2)\\ -\left(x-(\lfloor x\rfloor+1)\right), & \lfloor x\rfloor\equiv 1\ (mod\ 2)\end{cases}$$

$$f(x)=\varkappa\left(\frac{\lfloor x\rfloor}{2}\right)(x-\lfloor x\rfloor)+\varkappa\left(\frac{\lfloor x\rfloor-1}{2}\right)\left(-\left(x-(\lfloor x\rfloor+1)\right)\right)$$

$$=\left(1-sign\left(\frac{\lfloor x\rfloor}{2}-\left\lfloor\frac{\lfloor x\rfloor}{2}\right\rfloor\right)\right)(x-\lfloor x\rfloor)-\left(1-sign\left(\frac{\lfloor x\rfloor-1}{2}-\left\lfloor\frac{\lfloor x\rfloor-1}{2}\right\rfloor\right)\right)\left(x-(\lfloor x\rfloor+1)\right)$$

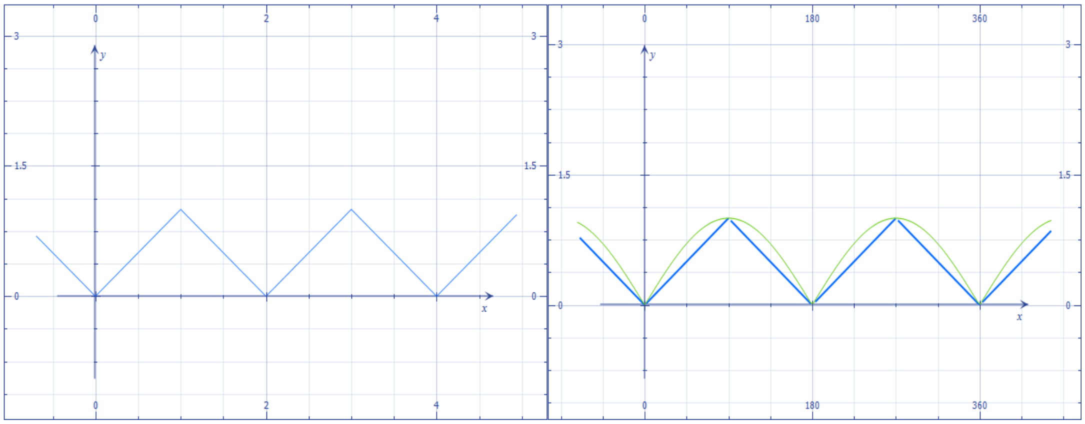
También,

$$f(x)=(-1)^{\lfloor x\rfloor}\left(x-\left(\lfloor x\rfloor+\frac{1-(-1)^{\lfloor x\rfloor}}{2}\right)\right)$$

Por otro lado,

$$f\left(\frac{x}{\pi/2}\right)\leq|\sin x|$$

Observación: $|\sin x|$ es una función continua en $\mathbb{R}$, periódica de período π e inyectiva en $\left[k\frac{\pi}{2},(k+1)\frac{\pi}{2}\right[$ (con $k\in\mathbb{Z}$).



Residuo

Sean $n \in \mathbb{N}$ y la función $[\![\ \ ]\!]_n: \mathbb{R} \to \{0, \dots, n-1\}$ definida así:

$$[\![x]\!]_n = k, \textit{ siempre que } \lfloor x \rfloor \equiv k \ (mod\ n)$$

Proyector

Sean $n \in \mathbb{N}$ y la función $\alpha_n: \{0, \dots, n-1\} \to \{(x_0, \dots, x_{n-1}) \in \{0,1\}^n | x_0 + \dots + x_{n-1} = 1\}$ definida así:

$$\alpha_n(k) = \Big(\delta(k-0), \dots, \delta\big(k-(n-1)\big)\Big)$$

Se define la aplicación $\boldsymbol{P_n}: \mathbb{R}^n \times \{0, \dots, n-1\} \to \mathbb{R}$ así:

$$\boldsymbol{P_n}\big((y_o, \dots, y_{n-1}), k\big) = (y_0, \dots, y_{n-1}) \cdot \alpha_n(k) = y_k$$

Además, sea $\{f_k\}_{\substack{k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ k<n}}$ una sucesión de funciones reales distintas, continuas en $[k + in, (k + in) + 1]$ (con $i \in \mathbb{Z}$).

Por consiguiente, es posible definir una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periódica de período n, así:

$$f(x) = \boldsymbol{P_n}(\ \{f_k(x)\}_{k<n}, [\![x]\!]_n) = f_{[\![x]\!]_n}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \varkappa\left(\frac{\lfloor x \rfloor - k}{n}\right) f_k(x)$$

Continua, si $f_k(k+1) = f_{k+1}(k+1)$ y $f_{n-1}(n) = f_0(0)$.

Ejemplo

La función del último ejemplo se puede generalizar de la siguiente manera.

Para $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ con $k < 2^n$, sea la función $f: \mathbb{R} \to [0,1]$ definida así:

$$f_k(x) = \begin{cases} \left(\sin\frac{(k+1)\pi}{2^n} - \sin\frac{k\pi}{2^n}\right)(x-k) + \sin\frac{k\pi}{2^n}, & \lfloor x \rfloor \equiv k\ (mod\ 2^n) \wedge \left\lfloor \frac{x}{2^{n-1}} \right\rfloor \equiv 0\ (mod\ 2) \\ \left(\sin\frac{(k+1)\pi}{2^n} - \sin\frac{k\pi}{2^n}\right)\big(x-(k+1)\big) + \sin\frac{(k+1)\pi}{2^n}, & \lfloor x \rfloor \equiv k\ (mod\ 2^n) \wedge \left\lfloor \frac{x}{2^{n-1}} \right\rfloor \equiv 1\ (mod\ 2) \end{cases}$$

Donde,

$$\sin\frac{(k+1)\pi}{2^n} = \sin\frac{k\pi}{2^n}\cos\frac{\pi}{2^n} + \sin\frac{\pi}{2^n}\cos\frac{k\pi}{2^n}$$

$$\cos\frac{(k+1)\pi}{2^n}=\cos\frac{k\pi}{2^n}\cos\frac{\pi}{2^n}-\sin\frac{k\pi}{2^n}\sin\frac{\pi}{2^n}$$

Y, $\sin\frac{\pi}{2^n}=\frac{\sqrt{2-a_{n-1}}}{2}$ $\cos\frac{\pi}{2^n}=\frac{\sqrt{2+a_{n-1}}}{2}$ $a_n=\begin{cases}-2, & n=0\\ \sqrt{2+a_{n-1}}, & n>0\end{cases}$

Luego,

$$f(x)=\sum_{k=0}^{2^n-1}\varkappa\left(\frac{\lfloor x\rfloor-k}{2^n}\right)f_k(x)$$

También,

$$f(x)=\left(\sin\frac{(\lfloor x\rfloor+1)\pi}{2^n}-\sin\frac{\lfloor x\rfloor\pi}{2^n}\right)\left(x-\left(\lfloor x\rfloor+\frac{1-(-1)^{\left\lfloor\frac{x}{2^{n-1}}\right\rfloor}}{2}\right)\right)+\sin\frac{\left(\lfloor x\rfloor+\frac{1-(-1)^{\left\lfloor\frac{x}{2^{n-1}}\right\rfloor}}{2}\right)\pi}{2^n}$$

f es continua en $\mathbb{R}$, periódica de período n e inyectiva en $[k,k+1[$ (con $k\in\mathbb{Z}$).

Por otro lado,

$$f\left(\frac{x}{\pi/2^n}\right)\leq|\sin x|$$

Operaciones sobre intervalos cerrados

Complemento

$$1-g\big((a,b),x\big)=\begin{cases}1, & x\notin[min(a,b),max(a,b)]\\ 0, & x\in[min(a,b),max(a,b)]\end{cases}$$

Intersección

Sea la función $h:\{(u,v)\in\mathbb{R}^2|u\neq v\}^2\times\mathbb{R}\to\{0,1\}$ definida así:

$$h\big((a,b),(c,d),x\big)=\begin{cases}0, & x\notin[min(a,b),max(a,b)]\cap[min(c,d),max(c,d)]\\ 1, & x\in[min(a,b),max(a,b)]\cap[min(c,d),max(c,d)]\end{cases}$$

$$h\big((a,b),(c,d),x\big)=g\big((a,b),x\big)g\big((c,d),x\big)$$

Diferencia

Sea la función $i:\{(u,v)\in\mathbb{R}^2|u\neq v\}^2\times\mathbb{R}\to\{0,1\}$ definida así:

$$i\big((a,b),(c,d),x\big)=\begin{cases}0, & x\notin[min(a,b),max(a,b)]-[min(c,d),max(c,d)]\\ 1, & x\in[min(a,b),max(a,b)]-[min(c,d),max(c,d)]\end{cases}$$

$$i\big((a,b),(c,d),x\big)=g\big((a,b),x\big)\Big(1-g\big((c,d),x\big)\Big)$$

Diferencia Simétrica

Sea la función $j:\{(u,v)\in\mathbb{R}^2|u\neq v\}^2\times\mathbb{R}\to\{0,1\}$ definida así:

$$j\big((a,b),(c,d),x\big)=\begin{cases}0, & x\notin[min(a,b),max(a,b)]\,\triangle\,[min(c,d),max(c,d)]\\ 1, & x\in[min(a,b),max(a,b)]\,\triangle\,[min(c,d),max(c,d)]\end{cases}$$

$$j\big((a,b),(c,d),x\big) = \big|g\big((a,b),x\big) - g\big((c,d),x\big)\big|$$

Unión

Sea la función $k: \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | u \neq v\}^2 \times \mathbb{R} \to \{0,1\}$ definida así:

$$k\big((a,b),(c,d),x\big) = \begin{cases} 0, & x \notin [min(a,b), max(a,b)] \cup [min(c,d), max(c,d)] \\ 1, & x \in [min(a,b), max(a,b)] \cup [min(c,d), max(c,d)] \end{cases}$$

$$k\big((a,b),(c,d),x\big) = j\big((a,b),(c,d),x\big) + h\big((a,b),(c,d),x\big)$$

Si $[min(a,b), max(a,b)] \cap [min(c,d), max(c,d)] = \emptyset$, entonces,

$$k\big((a,b),(c,d),x\big) = g\big((a,b),x\big) + g\big((c,d),x\big)$$

Identidades para el Complemento

- $1 - h\big((a,b),(c,d),x\big) = 1 - g\big((a,b),x\big)g\big((c,d),x\big)$
- $1 - k\big((a,b),(c,d),x\big) = \Big(1 - g\big((a,b),x\big)\Big)\Big(1 - g\big((c,d),x\big)\Big)$

Producto Cartesiano

Sea la función $l: \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | u \neq v\}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \{0,1\}$ definida así:

$$l\big((a,b),(c,d),(x,y)\big) = \begin{cases} 0, & (x,y) \notin [min(a,b), max(a,b)] \times [min(c,d), max(c,d)] \\ 1, & (x,y) \in [min(a,b), max(a,b)] \times [min(c,d), max(c,d)] \end{cases}$$

$$l\big((a,b),(c,d),(x,y)\big) = g\big((a,b),x\big)g\big((c,d),y\big)$$

Relaciones entre intervalos cerrados

Contenencia

Sea la función $m: \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | u \neq v\}^2 \to \{0,1\}$ definida así:

$$m\big((a,b),(c,d)\big) = \begin{cases} 0, & [min(a,b), max(a,b)] \nsubseteq [min(c,d), max(c,d)] \\ 1, & [min(a,b), max(a,b)] \subseteq [min(c,d), max(c,d)] \end{cases}$$

$$m\big((a,b),(c,d)\big) = g\big((a,b),c\big)g\big((a,b),d\big)$$

Igualdad

Sea la función $n: \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | u \neq v\}^2 \to \{0,1\}$ definida así:

$$n\big((a,b),(c,d)\big) = \begin{cases} 0, & ([min(a,b), max(a,b)] \nsubseteq [min(c,d), max(c,d)]) \vee ([min(c,d), max(c,d)] \nsubseteq [min(a,b), max(a,b)]) \\ 1, & ([min(a,b), max(a,b)] \subseteq [min(c,d), max(c,d)]) \wedge ([min(c,d), max(c,d)] \subseteq [min(a,b), max(a,b)]) \end{cases}$$

$$n\big((a,b),(c,d)\big) = m\big((a,b),(c,d)\big)m\big((c,d),(a,b)\big)$$

También,

$$n\big((a,b),(c,d)\big) = \delta(a-c)\delta(b-d) + \delta(a-d)\delta(b-c)$$

Disyunción

Sea la función $p: \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | u \neq v\}^2 \to \{0,1\}$ definida así:

$$p\big((a,b),(c,d)\big) = \begin{cases} 0, & [min(a,b), max(a,b)] \cap [min(c,d), max(c,d)] \neq \emptyset \\ 1, & [min(a,b), max(a,b)] \cap [min(c,d), max(c,d)] = \emptyset \end{cases}$$

$$p\big((a,b),(c,d)\big) = 1 - \Big(1 - g\big((a,b),c\big)\Big)\Big(1 - g\big((a,b),d\big)\Big)$$

Intersecantes

Sea la función $q: \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | u \neq v\}^2 \to \{0,1\}$ definida así:

$$q\big((a,b),(c,d)\big) = \begin{cases} 0, & \begin{array}{c}([min(a,b), max(a,b)] \cap [min(c,d), max(c,d)] = \emptyset) \vee ([min(a,b), max(a,b)] \subseteq [min(c,d), max(c,d)]) \\ \vee\ ([min(c,d), max(c,d)] \subseteq [min(a,b), max(a,b)])\end{array} \\ 1, & \begin{array}{c}([min(a,b), max(a,b)] \cap [min(c,d), max(c,d)] \neq \emptyset) \wedge ([min(a,b), max(a,b)] \nsubseteq [min(c,d), max(c,d)]) \\ \wedge ([min(c,d), max(c,d)] \nsubseteq [min(a,b), max(a,b)])\end{array} \end{cases}$$

$$q\big((a,b),(c,d)\big) = \Big(1 - p\big((a,b),(c,d)\big)\Big)\Big(1 - m\big((a,b),(c,d)\big)\Big)\Big(1 - m\big((c,d),(a,b)\big)\Big)$$

Conjunto de Cantor

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Se define el siguiente conjunto:

$$W_{[a,b]} = \left\{ I \subseteq [a,b] | I = \bigcup_{\substack{[a_i,b_i] \subseteq [a,b] \\ [a_i,b_i] \cap [a_j,b_j] = \emptyset \\ i,j \in \mathbb{N}\ con\ i \neq j}} [a_i, b_i] \right\}$$

Sea la aplicación $H: W_{[a,b]} \to W_{[a,b]}$ definida así:

$$H([a,b]) = \left[a, a + \frac{b-a}{3}, b - \frac{b-a}{3}\right]$$

Con la propiedad:

$$H(A \cup B) = H(A) \cup H(B), \qquad A, B \in W_{[a,b]}$$

Se define la siguiente sucesión de conjuntos cerrados $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ así:

$$F_n = \begin{cases} [a,b], & n = 0 \\ H(F_{n-1}), & n > 0 \end{cases}$$

Cada F_n es la unión de 2^n intervalos cerrados disjuntos de longitud $\left(\frac{b-a}{3}\right)^n$

Para $a = 0\ y\ b = 1$, el *conjunto de Cantor* es definido así:

$$C = \bigcap_{n=0}^{\infty} F_n$$

C es un conjunto cerrado en los reales, no vacío y de medida nula.

Como sucesión de conjuntos $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$:

n	A_n

0	$\{0\}$
1	$\{0,2\}$
2	$\{0,2,6,8\}$
3	$\{0,2,6,8,18,20,24,26\}$
4	$\{0,2,6,8,18,20,24,26,54,56,60,62,72,74,78,80\}$

$$A_n = \begin{cases} \{0\}, & n = 0 \\ A_{n-1} \cup \{p \in \mathbb{N} | p = q + \left(max(A_{n-1}) + (3^{n-1} + 1)\right) \wedge q \in A_{n-1}\}, & n > 0 \end{cases}$$

Como sucesión de números $\{a_{n,k}\}_{\substack{n\in\mathbb{N}\cup\{0\} \\ k\in\mathbb{N} \\ k\leq 2^n}}$:

$$a_{n,k} = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ a_{n-1,k}, & n > 0 \ \wedge k \leq 2^{n-1} \\ a_{n-1,k} + \left(a_{n-1,2^{n-1}+(3^{n-1}+1)}\right), & n > 0 \ \wedge k > 2^{n-1} \end{cases}$$

También,

$$a_{n,k} = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ a_{n-1,k} + \left\lfloor \dfrac{k-1}{2^{n-1}} \right\rfloor \left(a_{n-1,2^{n-1}+(3^{n-1}+1)}\right), & n > 0 \end{cases}$$

Se define la sucesión $\{F_{n,k}\}_{\substack{n\in\mathbb{N}\cup\{0\} \\ k\in\mathbb{N} \\ k\leq 2^n}}$ de intervalos cerrados contenidos en $[0,1]$ así:

$$F_{n,k} = \left[\left(\frac{1}{3}\right)^n a_{n,k}, \left(\frac{1}{3}\right)^n (a_{n,k} + 1)\right]$$

Luego,

$$F_n = \bigcup_{k=1}^{2^n} F_{n,k}$$

Se define la sucesión de funciones $f_n: [0,1] \to \{0,1\}$ así:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \notin F_n \\ 1, & x \in F_n \end{cases}$$

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{2^n} g\left(\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n a_{n,k}, \left(\frac{1}{3}\right)^n (a_{n,k} + 1)\right), x\right)$$

Conjunto potencia

Sea K un conjunto y $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia definida sobre K así:

$A\mathcal{R}B$, si y solo si, *"A y B son subconjuntos finitos de K y tienen igual cardinal".*

Luego, la clase de equivalencia de A se define así:

$$[A] = \{Ranf | f : A \to K \ es\ una\ función\ inyectiva\}$$

Por tanto,

$$[A] = \begin{cases} \{A\}, & A = \emptyset \\ \{Ranf | f\{1,2,\cdots,Card(A)\} \to K \ es\ una\ función\ inyectiva\}, & A \neq \emptyset \end{cases}$$

El conjunto potencia es dado por:

$$\mathcal{P}(K) = \bigcup_{A \subseteq K} [A]$$